Cálculo

Introdução ao limite

Prof. Me. Flávio Murilo de Carvalho Leal
Instituto Centro de Ensino Tecnológico
Faculdade de Tecnologia do Cariri

Um limite descreve o comportamento de uma função quando a variável independente se aproxima de um determinado valor.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{1}$$

Isso significa que, à medida que x se aproxima de a, a função $f(x)$ se aproxima de L.

Vamos considerar o limite:

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 1) \tag{2}$$

Para calcular esse limite, substituímos x por 2 na função:

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3 \tag{3}$$

Portanto, $\lim_{x \to 2} (x^2 - 1) = 3$.

O limite bilateral se aproxima de um valor a partir de ambos os lados (valores maiores e menores que a):

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-}\left(x^2-1\right)=2^2-1=3 \\ \lim_{x\to 2^+}\left(x^2-1\right)=2^2-1=3 \end{array}\right\} \lim_{x\to 2} f(x)=3 \tag{4}$$

ou seja,

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x) \tag{5}$$

O limite bilateral se aproxima de um valor a partir de ambos os lados (valores maiores e menores que a):

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{para } x \leq 3 \\ 5x - 7 & \text{para } x > 3 \end{cases}$$

O limite bilateral se aproxima de um valor a partir de ambos os lados (valores maiores e menores que a):

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} x^2 - 1 & \text{para } x \leq 3 \\ 5x - 7 & \text{para } x > 3 \end{cases} \\ &\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} \left(x^2 - 1\right) = 3^2 - 1 = 8 \\ \lim_{x\to 3^+} (5x - 7) = 5.3 - 7 = 8 \end{array}\right\} \lim_{x\to 3} f(x) = 8 \end{aligned} \tag{6}$$

O limite unilateral à direita se aproxima de um valor a partir da direita (valores maiores que a):

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \tag{7}$$

Isso significa que, à medida que x se aproxima de a e apenas com valores maiores que a, a função $f(x)$ se aproxima de L.

O limite unilateral à esquerda se aproxima de um valor a partir da esquerda (valores menores que a):

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \tag{8}$$

Isso significa que, à medida que x se aproxima de a e apenas com valores menores que a, a função $f(x)$ se aproxima de L.

Em outras palavras:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x) \tag{9}$$

Em outras palavras:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x) \tag{9}$$

$$\nexists \lim_{x\to a} f(x)$$

Não existe limite bilateral na função descrita abaixo:

$$
\begin{array}{l}
f_{(x)} = \begin{cases} x+3 & \text{para} \quad x \leq 1 \\ x-1 & \text{para} \quad x > 1 \end{cases} \\
\lim_{x \to 1^-} (x+3) = 1+3 = 4 \\
\lim_{x \to 1^+} (x-1) = 1-1 = 0
\end{array}
\qquad (10)
$$

Mostre se as funções a seguir possuem limites bilaterais:

1.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{3}, & x < 2 \\ 3 - x^2, & x \geq 2 \end{cases}$$

2.
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 8 - 2x, & x \geq 2 \end{cases}$$

3.
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 2 \end{cases}$$